

Eine dreiwertige Logik

Der alltäglichen Beobachtung folgend, dass man sich manchmal nicht so sicher ist, führen wir neben den bekannten Wahrheitswerten WAHR und FALSCH einen dritten Wert ein, den wir UNBEKANNT nennen wollen.

Dadurch entsteht eine dreiwertige Logik, die zum Beispiel praktisch ist, um Termine abzumachen. Damit alle an einem Termin können, muss für jeden WAHR gelten; sobald einer UNBEKANNT (aber niemand FALSCH) ist, ist das Ergebnis UNBEKANNT. Ist nur einer FALSCH, ist das Ergebnis FALSCH. Dies entspricht der logischen Verknüpfung UND.

Die Verknüpfung ODER illustrieren wir mit der Frage, ob sich im Bekanntenkreis ein Kärcher Hochdruckreiniger befindet, der uns ausgeliehen werden kann. Gilt für alle Bekannten FALSCH, so ist das Ergebnis FALSCH. Gibt es mindestens ein UNBEKANNT, aber kein WAHR, so ist das Ergebnis UNBEKANNT. Gibt es mindestens ein WAHR, ist das Ergebnis WAHR.

UND	FALSCH	UNBEKANNT	WAHR
FALSCH	FALSCH	FALSCH	FALSCH
UNBEKANNT	FALSCH	UNBEKANNT	UNBEKANNT
WAHR	FALSCH	UNBEKANNT	WAHR

Tabelle 1: UND-Verknüpfung in der dreiwertigen Logik

ODER	FALSCH	UNBEKANNT	WAHR
FALSCH	FALSCH	UNBEKANNT	WAHR
UNBEKANNT	UNBEKANNT	UNBEKANNT	WAHR
WAHR	WAHR	WAHR	WAHR

Tabelle 2: ODER-Verknüpfung in der dreiwertigen Logik

Die beiden Tabellen sind in gewisser Weise symmetrisch. Jeder Wahrheitswert kommt in beiden Tabellen insgesamt 6 mal vor.

Eine vierwertige Logik

Die Tabellen 1 und 2 legen nahe, wie wir einen vierten Wahrheitswert einführen können. Nennen wir ihn vielleicht UNSICHER, so nach dem Motto: Wenn das Ergebnis UNBEKANNT ist, weiß man gar nichts, ist das Ergebnis UNSICHER, so weiß man schon ein bisschen was – hat vielleicht gefragt – aber das Ergebnis ist trotzdem UNSICHER.

Wir arbeiten das Beispiel der Terminabfrage mit diesen 4 Wahrheitswerten aus (das entspricht der Verknüpfung UND):

- Wenn alle können, also WAHR sind, ist das Gesamtergebnis WAHR.
- Sobald jemand UNSICHER, aber niemand UNBEKANNT oder FALSCH ist, ist das Gesamtergebnis UNSICHER.
- Ist ein Ergebnis UNBEKANNT, aber keines FALSCH, so ist das Gesamtergebnis UNBEKANNT.
- Falls einer FALSCH ist, ist das Gesamtergebnis FALSCH.

UND	FALSCH	UNBEKANNT	UNSICHER	WAHR
FALSCH	FALSCH	FALSCH	FALSCH	FALSCH
UNBEKANNT	FALSCH	UNBEKANNT	UNBEKANNT	UNBEKANNT
UNSICHER	FALSCH	UNBEKANNT	UNSICHER	UNSICHER
WAHR	FALSCH	UNBEKANNT	UNSICHER	WAHR

Tabelle 3: UND-Verknüpfung in der vierwertigen Logik

Bei der Umfrage nach dem Hochdruckreiniger, die der Verknüpfung ODER entspricht, sieht es wie folgt aus:

- Gilt für alle FALSCH, ist das Ergebnis FALSCH.
- Ist ein Ergebnis UNBEKANNT, aber keines UNSICHER oder WAHR, so ist das Gesamtergebnis UNBEKANNT.
- Ist ein Ergebnis UNSICHER, aber keines WAHR, so ist das Gesamtergebnis UNSICHER – was immer uns das nützen mag.
- Ist ein Ergebnis WAHR, so ist auch das Gesamtergebnis WAHR.

UND	FALSCH	UNBEKANNT	UNSICHER	WAHR
FALSCH	FALSCH	UNBEKANNT	UNSICHER	WAHR
UNBEKANNT	UNBEKANNT	UNBEKANNT	UNSICHER	WAHR
UNSICHER	UNSICHER	UNSICHER	UNSICHER	WAHR
WAHR	WAHR	WAHR	WAHR	WAHR

Tabelle 4: ODER-Verknüpfung in der vierwertigen Logik

Eine n -wertige Logik

Verallgemeinern wir die drei- und vierwertige Logik auf eine n -wertige Logik. Dazu bezeichnen wir die Wahrheitswerte mit den Zahlen $1, 2, \dots, n$, wobei die 1 FALSCH und n WAHR entspricht und die Zahlen dazwischen die Zustände dazwischen. Die natürliche Verallgemeinerung der UND-Tabellen ist dann

$$\text{UND}(\mathcal{N}) = \min \mathcal{N} \text{ für } \mathcal{N} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1)$$

und für ODER erhalten wir

$$\text{ODER}(\mathcal{N}) = \max \mathcal{N} \text{ für } \mathcal{N} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2)$$

So dürfte es sich auch erklären, dass man manchmal das Minimum mit dem Zeichen für UND \wedge und das Maximum mit dem Zeichen für ODER \vee bezeichnet.

Wir sind allerdings nicht die ersten, denen dies auffällt: Die einschlägige Quelle ist wohl Kurt Gödel: Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien* 69, 65-66 (1932). Gödel bezeichnet die Menge der Zustände mit

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1. \quad (3)$$